

بررسی خواص چند مقیاسی و چند فرکتالی توپوگرافی ایران

امیر کرم - دانشیار گروه جغرافیای طبیعی، دانشکده علوم جغرافیایی دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.
علی احمدآبادی - دانشیار گروه جغرافیای طبیعی، دانشکده علوم جغرافیایی دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.
میترا صابری* - دانشجوی دکتری ژئومورفولوژی، دانشگاه خوارزمی، تهران.

پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۱۰ تأیید نهایی: ۱۳۹۷/۰۹/۲۵

چکیده

ژئومورفولوژی به مطالعه علمی ویژگی‌های فرم و شکل سطح زمین می‌پردازد. وجود انواع لندفرم‌ها و تنوع آنها به طور عمده با تغییر در شکل و موقعیت زمین و توپوگرافی کنترل می‌شود. هندسه‌ی فرکتال اشکال متنوع و نامتقارن پدیده‌های جغرافیایی و ژئومورفیک را با استفاده از داده‌های توپوگرافیک و خصوصیات فرم، بررسی و تحلیل، طراحی و مدل‌سازی می‌کند. در واقع علاقه‌مندی و کاربرد مسائل فرکتال در ژئومورفولوژی به این خاطر است که بسیاری از لندفرم‌های ژئومورفیکی حالت فرکتال دارند و شکل‌گیری و تحول فرکتال‌ها را می‌توان با روابط ریاضی تبیین کرد. در این بررسی از داده‌های رقومی توپوگرافی ایران در یک شبکه مربعی 1320×1500 پیکسل استفاده شد. از روش‌های شمارش خانه برای بعد فرکتال، نمای زبری (تحلیل طیف نمایی) و تحلیل چند فرکتالی (واریانس کل پروفایل ارتفاعی، تابع همبستگی تعمیمی ارتفاع-ارتفاع و انحنا وابسته به مقیاس) برای تحلیل فرکتالی توپوگرافی ایران استفاده گردید. با استفاده از روش شمارش خانه، بعد فرکتالی چشم‌انداز توپوگرافی به مقدار $2/20 = D_f$ بدست آمده است. همچنین با استفاده از تحلیل طیف توانی در فضای فوریه پروفایل ارتفاع نمای زبری α تخمین زده شده است که نمای زبری بدست آمده به مقدار $0/48 = \alpha$ در رابطه $D_f = 3 - \alpha$ که برای سطوح رندم خودمتشابه و مونو فرکتال صادق است را قانع نمی‌کند. جهت بررسی و اثبات خاصیت چند فرکتالی پروفایل ارتفاعی، روش‌های مختلفی به کار گرفته شده تا نمای چند فرکتالی (n) محاسبه گردد. در این نتیجه نشان داده شد که این نماها در رابطه‌ی ساده‌ی مربوط به مونو فرکتال‌ها، بصورت $\alpha(n) = n\alpha$ صدق نمی‌کند. که اثبات‌کننده‌ی خواص چند مقیاسی در توپوگرافی ایران است. این پژوهش می‌تواند زمینه‌ی را برای تحقیقات بعدی هندسه فرکتالی در عرصه‌های جغرافیا، ژئومورفولوژی، زمین‌شناسی، محیط زیست و سایر علوم زمین مهیا و هموارتر سازد.

واژگان کلیدی: ژئومورفولوژی، توپوگرافی، هندسه فرکتال، ایران.

مقدمه

ژئومورفولوژی به مطالعه علمی ویژگی های هندسی ناهمواری های سطح زمین می پردازد. آنچه از کلمه ترکیبی ژئومورفولوژی استنباط می گردد، توصیف و تشریح شکل هندسی ناهمواری های پوسته زمین است و این بحث توپوگرافی را نیز شامل می شود که مرتبط با لندفرم های سطح زمین است. در قلمرو دانش ژئومورفولوژی، علاوه بر اینکه به توصیف صحیح، کامل و ژنتیک اشکال ناهمواری ها توجه می شود، منشأ، کیفیت و عوامل بی شماری که در تغییر اشکال زمین موثرند، تفسیر و تبیین می شوند. لندفرم یک عارضه زمین یا سیمای زمینی است که تشکیل آن به وسیله فرآیندهای طبیعی صورت گرفته و می توان آن را با شاخص هایی توصیف و اندازه گیری کرد و در صورت شناسایی، این لندفرم اطلاعاتی درباره ساختار خود به همراه ترکیب، بافت یا یکپارچه بودنش ارائه می دهد. وجود انواع لندفرم ها و تنوع آنها به طور عمده با تغییر در شکل و موقعیت زمین و توپوگرافی کنترل می شود. بنابراین، طبقه بندی و شناسایی مناطق مختلف با توجه به ویژگی های مورفومتری آنها برای بسیاری از مطالعات و برنامه ریزی ها ضروری است (نگهبان و مکرم، ۱۳۹۳: ۵۷).

مدل سازی در ژئومورفولوژی که پیش تر برای فهم بهتر سازمان فضایی جغرافیایی و تحلیل و تبیین فرآیندهای ژئومورفولوژیک و لندفرم ها به کار گرفته می شد و تأثیر عناصر و اجزای سیستم های جغرافیایی و تقابل آنها را با یکدیگر مورد بررسی قرار می داد، امروزه می تواند دستاوردهای هندسه ی فرکتالی^۱ (شکنه ای) را نیز در کنار خود داشته باشد. هندسه ی فرکتال اشکال متنوع و نامتقارن پدیده های جغرافیایی و ژئومورفیک را در کنار هم بررسی و تحلیل، طراحی و مدل سازی می کند، به علاوه این عرصه ی علمی در دو زمینه ی علوم کاربردی و محاسباتی نیز توانمند است. رشته کوه ها، پشته های ابر، مسیر رودها، خطوط ساحلی، پیکره کوه ها و حتی سیارات منظومه شمسی، ساختار فرکتالی^۲ دارند و به زبان ریاضی، قابل ترسیم و توصیف هستند. طراحی این پدیده ها به صورت مستقل یا در کنار هم و ساخت مدل های تصویری می تواند جغرافیدانان و ژئومورفولوژیست ها را در درک بهتر از محیط های طبیعی و برنامه ریزی و مدیریت محیط یاری رساند. به عنوان مثال یک دشت سیلابی از جنس رس، در یک دوره ی خشکسالی پدیده ای طبیعی است که ساختار فرکتالی دارد، به کمک الگوریتم های نه چندان مشکل، بر مبنای قوانین هندسه ی فرکتال و فنون گرافیکی می توان آن را در رایانه مدل سازی کرد (ملک عباسی، ۱۳۸۱). در واقع علاقه مندی و کاربرد مسائل فرکتال در ژئومورفولوژی به این خاطر است که بسیاری از لندفرم های ژئومورفیکی حالت فرکتال دارند و شکل گیری و تحول فرکتال ها را می توان با روابط ریاضی تبیین کرد. در این راستا با در نظر گرفتن اینکه فرم، فرآیند و زمان سه فاکتور اساسی در پیدایش لندفرم های متعدد سطح زمین هستند پس با در نظر گرفتن فرم به عنوان بعد فرکتال^۳ و فرآیند به عنوان عامل خود سازماندهی^۴ باید اشکال آتی در طی زمان با استفاده از فرمول های آماری منتج از هندسه فرکتال قابل پیش بینی باشند و این مسئله رابطه بین رفتار لندفرم (واکنش های دراز مدت لندفرم ها) و بعد فرکتال را تبیین می کند. همچنین استفاده از تجزیه و تحلیل فرکتال کمک می کند تا قوانین توپوگرافی در سطح زمین، در طیف گسترده ای از مقیاس های فضایی و رژیم های آب و هوایی درک شود.

با مشاهده طبیعت، بسیاری از پدیده ها دیده می شود که فرم های خود همانند^۵ دارند. فرم هایی که گاه آنچنان دقیق هستند که اگر بخشی کوچکی از یک جسم انتخاب شود و با دقت به آن دیده شود از لحاظ شکلی، درست مانند جسم اصلی و بزرگتر خواهد بود. دانه های برف، طرح ایجاد شده در مرز سوختگی یک کاغذ آتش گرفته، رشد شاخه ای رودخانه

^۱. Fractal Geometry

^۲. Fractal Structure

^۳. Fractal dimension

^۴. Self-organizing^۴.

^۵. Self-similarity

ها، خط ساحلی و...، مثال‌هایی هستند که می‌توان به راحتی از خودهمانندی در طبیعت دید. علاوه بر موارد یاد شده طرح‌های خودهمانند در مورد پدیده‌های مرتبط با رشد نیز بسیار دیده می‌شوند. در موارد دیگری نیز همچون شکل‌گیری گسل‌ها، مورفولوژی رودخانه‌ها و حوزه‌های آبریز و نیز در مقیاس بزرگتر مورفولوژی صفحات تکتونیک، باشد. در سال‌های اخیر همانندسازی‌های بر پایه‌ی نظریه‌های رشد این‌چنینی، پیشرفت‌های بسیاری کرده و در بسیاری موارد درهایی را به روی دانشمندان گشوده که قبلاً در حیطه‌ی بررسی دانش کمتر ممکن بوده‌اند. بنابراین در طبیعت و توپوگرافی و بسیاری از فرم‌های کوچک و بزرگ ژئومورفیک پدیده خودهمانندی دیده می‌شود و می‌توان آن‌را از طریق اندازه‌گیری بعد فرکتال بررسی و تحلیل نمود. بررسی آماری و فرکتالی ژئومورفولوژی به نسبت رویکرد جدیدتری است که مورد بحث بسیاری از مطالعات در مورد توپوگرافی ایران نیز بوده است ولی این مطالعات بیشتر متمرکز بر توپوگرافی ناحیه‌ای و منطقه‌ای بوده است و هیچ‌گاه مطالعه در مقیاس کلی ایران صورت نگرفته است لذا در این مقاله سعی می‌شود که این خلا پر شود. برخی مطالعات نیز در این رابطه مربوط به علوم دیگر است. ذیلاً به کارهای انجام شده در مطالعات خارجی و داخلی اشاره می‌شود.

بوروگ عقیده دارد که هندسه فرکتال روشی را برای کمی‌سازی جهت توصیف لندفرمها فراهم آورده که تقریب‌های جدیدی را برای اندازه‌گیری‌ها و تحلیل‌ها به دست می‌دهد و اجازه می‌دهد کلیات اشیای طبیعی در مقیاس‌های مختلف، مقایسه و مقادیر تحلیلی این مقیاس‌ها مطالعه شوند (بوروگ، ۱۹۸۱:۲۴۱). در ژئومورفولوژی، روش هندسه فرکتال برای اولین بار در مطالعه طول خطوط سواحل و شکل‌الگوهای زهکشی و گسل‌ها استفاده شد (نیکورا^۱ ۱۹۹۱:۱۳۲۹). ساپوژنکف و فوفولا معتقدند که فرکتال‌ها یا خودهمانند و یا خودناهم‌گرد^۲. در مورد خودهمانند، شکل جزء، شباهت محسوسی به شکل کل دارد و این جزء در همه جهات به نسبت ثابتی رشد می‌کند و کل را به وجود می‌آورد. اما در خودناهم‌گرد، شکل جزء در همه جهات به نسبت ثابتی رشد نمی‌کند. مثلاً در مورد رودخانه‌ها و حوضه‌های آبریز بعد فرکتال طولی، متفاوت از بعد فرکتالی عرضی است. به خودهمانند، همسان‌گرد و به خودناهم‌گرد، ناهمسان‌گرد می‌گویند (ساپوژنکف و فوفولا ۱۹۹۹:۸۴۵).

بتی به این نتیجه رسیده که فرکتال راه‌های جدید نگاه کردن به پدیده‌های جغرافیایی را ارائه می‌دهد و ابزاری جدید برای تجزیه و تحلیل فضای جغرافیایی است. از زمانی که فرکتال شناخته شد بسیاری از تئوریها در جغرافیا با استفاده از مفاهیم فرکتال بازتفسیر شده‌اند (بتی، ۱۹۹۲: ۳۶-۳۵). مک کلور فرکتال‌ها را به دو دسته عمومی تقسیم می‌کند: اول نوع ریاضی (یا غیرتصادفی) و دوم نوع طبیعی (یا تصادفی). فرکتال‌های تصادفی آنهایی هستند که الگوهای تصادفی را تولید می‌کنند مثل آنچه در طبیعت دیده می‌شود (مک کلور، ۱۹۸۵، ۵۲). دافینه ذکر کرده از آنجایی که تنوع، درشتی و بی‌نظمی زمین، کانون پدیده‌های جغرافیایی است، بنابراین تعجب آور نیست که تئوری فرکتال این رشته را غنی سازد، فرکتال اندازه‌گیری بی‌نظمی اشیاست و محاسبه بعد فرکتال قادر به اندازه‌گیری بی‌نظمی و تشریح پیچیدگی است (دافینه، ۲۰۱۲: ۱). پندی نیز معتقد است که بوسیله‌ی هندسه‌ی فرکتال می‌توان ساختار ابرها، کوه‌ها یا گسل‌های زمین را به راحتی توصیف و شبیه‌سازی کرد (پندی، ۱۳۶۸: ۲۶). از موارد قابل توجه دیگر در جغرافیا، تبیین بعد فرکتال (فرم) کوه‌های مختلف است که هریک شکل و ترکیب ویژه خود را دارند.

چندین آزمون ماهیت فرکتال سطح زمین با استفاده از روش‌های مختلفی براساس مدل‌های فرکتال انجام شده‌اند. مثلاً، هرچند مارک و آرونسون (۱۹۸۴)، ۱۷ نمونه از سطح زمین را بررسی کردند (مدل‌های ارتفاع دیجیتال USGS)، آنها فقط از یک تکنیک تحلیلی برای داده‌های خود استفاده کردند. در مقابل، روی و همکاران (۱۹۸۷) مجموعه‌ای از روش‌های مختلف را به کار بردند، اما این روش‌ها فقط برای یک نمونه از سطح به کار رفتند. در مقاله کلینکنبرگ

^۱Nikora(1991)

^۲.Self-affine

(۱۹۸۸) نتایج هفت روش مختلف از تحلیل ماهیت فرکتال سطح زمین که برای پنجاه و پنج نمونه سطح زمین به کار برده و یک هدف مطالعه، مشاهده چگونگی تغییر قضایی بعد فرکتال بین استان های فیزیوگرافی بود. هدف دیگر آن مشاهده ثبات روش های مختلف استفاده شده برای تعیین بعد فرکتال سطوح زمین بود. با به کار بردن روش های مختلف برای مجموعه ای از سطوح زمین، می توان ثبات روش ها را مشاهده کرد. این احتمال وجود دارد که روش متفاوت بتوانند تفاوت هایی در ابعاد فرکتال حاصل برای یک سطح منفرد بشوند.

گنتینگ (و همکاران ۲۰۱۲: 247) برآوردهای ابعاد فرکتال را با بررسی نمونه های بزرگ تحت اشباع نفوذ پذیری آن، در مطالعات شبیه سازی نمونه های محدود و در مثال های داده شده در پروفایل های دریای آرکیک بررسی و ارزیابی کردند. برای سری های زمانی و یا ترانسکت خط داده، جعبه شمارش، هال چوب، نیمه واریوگرام، تبدیل کسینوسی گسسته و برآوردگر موجک همراه با برآوردهای متنوع با شاخص قدرت ۲ (واریوگرام) و ۱ (مادوگرام)، تمام اجرا در بسته فرکتال دیم R مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به هر دو کارایی و نیرومندی، با استفاده از برآوردگر مادوگرام، که می تواند به عنوان یک نسخه آماری کارآمد تر از برآوردگر هال چوب تفسیر و توصیه شده است. برای داده های دو بعدی شبکه، پیشنهاد برآوردهای رگرسیونی قوی با استفاده از میانگین برآورد های متنوع در ردیف ها و ستون ها استفاده شود. به طور کلی، ارتباط بین تغییرات قدرت شاخص $p > 0$ برای فرآیندهای تصادفی و بعد هوسدروف مسیره های نمونه آنها در صورتی بسیار قوی $p = 1$ باشد به نظر می رسد. کلینکنبرگ (۱۹۹۴: 24) مروری عمیق از روش های اغلب استفاده شده در تعیین ابعاد فرکتال منحنی های تک بعدی در مقاله، مرور روش های استفاده شده در تعیین ابعاد فرکتال ویژگی های خطی، ارائه شده است. نظرات اغلب متضادی درباره روش های متفاوت جمع آوری شده است و با یکدیگر مقایسه شده اند. علاوه بر این، روش های مفید بالقوه ای همچون اندازه گیری فرکتال، روش تقسیم کننده، شمارش جعبه، روش های طیفی، تغییر نگار نیز مرور شده است. توصیه های کلی که باید در هنگام به کار بردن هر روش صورت گیرد نیز در نظر گرفته شده است. سانتیس (۱۹۹۷: ۱۹۹۷۲۰۹۹) در مقاله خود، روش تقسیم کننده برای سطوح و پروفایل های فرکتالی خود ناهمگرد، بسیاری از پروفایل ها و سطوح مورد توجه در زمین شناسی و ژئوفیزیک بر اساس فرکتال خودناهمگرد مدل سازی کرد. روش تقسیم اولین روش معرفی شده در تحلیل فرکتالی بود، که به طور کلی برای فرکتال های خودمانند مناسب است و توسط براون (۱۹۸۷) با استفاده از یک رویکرد چند مرحله ای برای تخمین زدن ابعاد فرکتال پروفایل های خودناهمگرد اقتباس شد. در اینجا، روشی با تکنیک ۱ مرحله ای اصلاح شده، اما این تکنیک نشان می دهد که در عمل یکی دیگر از روش های واریانس است. سپس، روش تقسیم را به سطوح فرکتال خودناهمگرد تعمیم داده شد. این روش با استفاده از توابع یک و دو بعدی ترکیبی از ابعاد فرکتالی شناخته شده آزمایش شده است. لاجوی و شرتزر (۱۹۹۰: ۶۳) با تحلیل توپوگرافی فرانسه در زولویشن ۱ کیلومتری، نشان دادند که با افزایش ارتفاع، بعد جعبه به طور سیستماتیک از ۲ (بیشینه ممکن) به صفر (کمینه) کاهش می یابد. این امر نشان می دهد که مونوفرکتال ها در بهترین حالت یک تقریب توپوگرافی نزدیک به متوسط هستند. همان گونه که در مقاله لاجوی و شرتزر (۱۹۹۰: ۶۲)؛ و لوالی و همکاران (۱۹۹۳: ۱۵۸) مطرح شد، پرداختن به توپوگرافی به صورت یک میدان ناوردای مقیاس، مناسب تر بوده و به طور کلی مستلزم اندازه گیری های مولتی فرکتال و توابع نمایی است (به جای یک نمای مقیاس بندی واحد مانند بعد فرکتالی). آنگاه یک بی کرانی ابعاد فرکتالی (یکی برای هر آستانه یا به طور معادل یکی برای هر لحظه آماری) برای مشخصه یابی کامل مقیاس بندی لازم است. چند مطالعه مولتی فرکتالی توپوگرافی که نشان می دهند که این روش در نواحی مختلف جهان و روی بازه های مقیاسی مختلفی، چندمقیاسی است را می توان در کارهای لاجوی و شرتزر (۱۹۹۰: ۶۷)؛ لوالی و همکاران (۱۹۹۳: ۱۸۳)؛ ویزل و همکاران (۱۹۹۴)؛ لاجوی و همکاران (۱۹۹۵: 18)؛ گاگون و همکاران (۲۰۰۳: ۸۰۳) یافت. یک موضوع مشابه با مونو در برابر مولتی فرکتال نیز در مطالعه شکستگی ها و سایر سطوح مصنوعی شکل می گیرد (مثلا مورل و همکاران ۲۰۰۰)؛ در حالی که مدل مونوفرکتال بسیار محبوب است، نتایج مستقلی نیز به مولتی فرکتال می پردازند (بوچاد و همکاران ۱۹۹۳؛ اشمیت بول و همکاران (۱۹۹۵))

همچنین شواهد غیرمستقیم بسیاری برای مقیاس‌بندی توپوگرافی وجود دارد. برای مثال، توان بازتاب و گسیل سطحی در طول موج‌های مختلف، به طور غیرخطی با توپوگرافی در بازه وسیعی از مقیاس‌ها جفت شده‌اند. از آنجایی که نوردایی مقیاس، یک اصل تقارن است، اگر شکستی در مقیاس‌بندی توپوگرافی وجود داشته باشد باید در مورد دوم مشاهده شود و برعکس. یافته‌های هاروی و همکاران (۱۱۲:۲۰۰۲) و گوناک و همکاران (۲۰۰۳:۲۳۲۳) که میدان‌های تابش ناشی از آتشفشان‌ها را از راه دور ثبت کردند، مولتی‌فرکتال هستند و بنابراین مولتی‌فرکتالی توپوگرافی‌های متناظر را بیان می‌کنند. به طور مشابه، مقیاس‌بندی مغناطیس‌پذیری سطح (پیلیکنگتون و تودوس‌چاک ۱۹۹۵)، چگالی صخره (لیری ۱۹۹۷:۴۵۴؛ لاجوی و همکاران ۲۰۰۵:۴۲)، و مقیاس‌بندی چندگانه ژئومغناطیس (لاجوی و همکاران ۲۰۰۱:۱۱۹۶)، پکنولد و همکاران (۲۰۰۱) و سرعت‌های صوتی صخره (مارسان و بین ۱۹۹۹:۲۷۶) همگی مرتبط هستند.

۲- مبانی نظری (فرکتال و چند فرکتالی)

تحلیل فرکتال و چند فرکتال^۱ توپوگرافی برای شناخت بهتر لندفرم‌ها، روشی بسیار مفید برای بدست آوردن توپوگرافی تصنعی در ژئومورفولوژی، زمین‌شناسی و جغرافیا است که به نتایج جدیدی منجر شده است. مفهوم فرکتال اولین بار به وسیله مندلبروت (۱۹۷۵) در مقاله‌ای با عنوان اندازه‌گیری توپوگرافی زمین، طول خط ساحل سنگی مطرح شد. ویژگی نوردایی مقیاس^۲ (تغییرناپذیری مقیاس) توپوگرافی زمین در انواع لندفرم‌های ژئومورفولوژیکی و زمین‌شناختی، مفهوم کلیدی فرکتالی بودن آنهاست. یعنی برخی فرم‌ها یا پدیده‌ها صرفنظر از مقیاس‌شان، شبیه به هم هستند. مقیاس نوردا در توپوگرافی به این معنی است که بطور مثال آماره‌های بخشی از پروفیل ارتفاعی در اندازه‌ی پنجره‌ای به طول L حقیقتاً مستقل از اندازه طول L است. این ویژگی منجر به شکل‌گیری قوانین توانی^۳ مانند $y \sim x^\alpha$ بین دو مقدار داده y و x می‌شود که در آن x با مقیاس‌نمایی^۴ یا بعد فرکتال α به اندازه‌ی مقیاس - طول در سیستم اشاره دارد. بعد فرکتال اندازه‌ای از خصوصیات کلی یک سیستم است و در بسیاری موارد مستقل از جزئیات گوناگون سیستم بوده و برای طبقه‌بندی سیستم‌ها و مدل‌های مختلف در کنار سایر اندازه‌گیری‌های آماری استفاده می‌شود.

در مطالعات مختلف گذشته (به عنوان نمونه لاجوی و چرتزر (۱۹۹۳)^۵؛ لاولی و همکاران، ۱۹۹۰)، مشخص شده که در بعضی موارد، توپوگرافی پیچیده‌تر از آن است که با تک مقیاس‌نمایی همچون بعد فرکتال توضیح داده شود. بهتر است توپوگرافی به عنوان کمیت مقیاس نوردا، با اندازه‌گیری‌های چند فرکتال و توابع‌نمایی مورد مطالعه قرار گیرد. این مسئله باعث می‌شود برای گشتاور^۶های مختلف یک متغیر، ابعاد فرکتال بی‌نهایتی لازم باشد تا خواص مقیاسی آن بطور کامل مشخص گردد. بدین معنی که برای یک پروفایل ارتفاعی $\{h_1, h_2, h_3, \dots, h_n\}$ از یک نمونه توپوگرافی در اندازه پنجره‌ای با طول L و با تعداد نقاط داده‌ای N_L ، اندازه‌ی گشتاور N امین نوسانات ارتفاعی از رابطه‌ی (۱) تعریف می‌شود:

$$m_n = \langle h^n \rangle = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} h_i^n \quad (\text{رابطه ی ۱})$$

که در آن نماد $\langle \dots \rangle$ برای میانگین‌گیری فضایی است، با توجه به اینکه گشتاور دوم با $n=2$ شبیه $M_{2n} \sim L^{2a}$ خواهد بود، لذا برای توپوگرافی تک فرکتالی انتظار می‌رود که برای گشتاورهای بالاتری با $n=3, 4, 5, \dots$ ، مقیاس‌نمایی n برابر α خواهد بود به طور مثال،

^۱. Multi Fractal

^۲. scale invariance

^۳. Power Laws

^۴. Scaling exponent

^۵. Lovejoy & Schertzer

^۶. moment

$$M_n \sim L^{na} \quad (\text{رابطه ی ۲})$$

اما برای توپوگرافی ارتفاعی چند فرکتال مشاهده شده که برای هر مقدار n در روابط مقیاسی، یک بعد فرکتال جدید یا مقیاس نمایی $\alpha(n)$ ایجاد می شود، به طور مثال:

$$M_n \sim L^{a(n)} \quad (\text{رابطه ی ۳})$$

در رابطه ی (۳) بطور کلی $a(n) \neq n\alpha$ است.

مدل های رشد سطح و سطوح زیر در موضوعات ژئوفیزیک و جغرافیا از دیدگاه های نظری و تجربی جالب هستند (باراباسی و استنلی ۱۹۹۵). مدل های گسسته مختلفی برای توصیف فرآیندهای رشد سطح زمین پیشنهاد شده اند. برای نمونه میکیان (۱۹۹۷) را ببینید. این مدل ها پروفایل ارتفاعی خودناهمگرد $h(x)$ تولید می کنند به طوری که تابع توزیع احتمالی^۱ آن، (PDF) در مقیاس ناوردا به صورت زیر تعریف می شود:

$$h(x) \cong b^{-\alpha} h(bx) \quad (\text{رابطه ی ۴})$$

در رابطه ی بالا \cong ، به معنی از نظر آماری برابر یا تقریباً برابر و $\alpha \geq 0$ نمای زبری نامیده می شود. این رابطه بدین معنی است که اگر در یک چشم انداز توپوگرافی به پنجره ای به اندازه طول L نگاه کنیم و ارتفاع (تابع توزیع احتمالی PDF) اندازه گیری بشود با تغییر اندازه پنجره توسط فاکتور مقیاس b (بطور مثال $L \rightarrow bL$)، اگر پروفایل ارتفاعی، خودناهمگرد باشد، آنگاه PDF پروفایل ارتفاعی در پنجره ی جدیدی ضرب در فاکتور مقیاسی $b^{-\alpha}$ می شود و باید همانند PDF اصلی باشد. چنین مدل های سطحی خودناهمگرد با تک نمای α ، مونوفرکتال نامیده می شوند. برای توپوگرافی خودناهمگرد، بعد فرکتال پروفایل ارتفاعی بصورت $D_f = \alpha - 3$ است.

در این مقاله برای بررسی حالت فرکتال توپوگرافی ایران روش های آماری مختلف مورد بررسی قرار خواهد هدف آن است تا نشان داده شود با توجه به تنوع توپوگرافی ایران، توپوگرافی ایران خصوصیت چندفرکتالی دارد. برای این منظور ابتدا بعد فرکتال D_f توپوگرافی ایران با استفاده از شمارش جعبه^۲ محاسبه می گردد. در بخش بعدی، نمای زبری توپوگرافی ایران با استفاده از تحلیل طیف نمایی^۳ بدست خواهد آمد، اگر بررسی رابطه $D_f = \alpha - 3$ برقرار نباشد توپوگرافی ایران خودناهمگرد (تک فرکتالی) خواهد بود در غیر این صورت توپوگرافی چندفرکتالی است و در رابطه ی (۳) بطور کلی $a(n) \neq n\alpha$ خواهد بود.

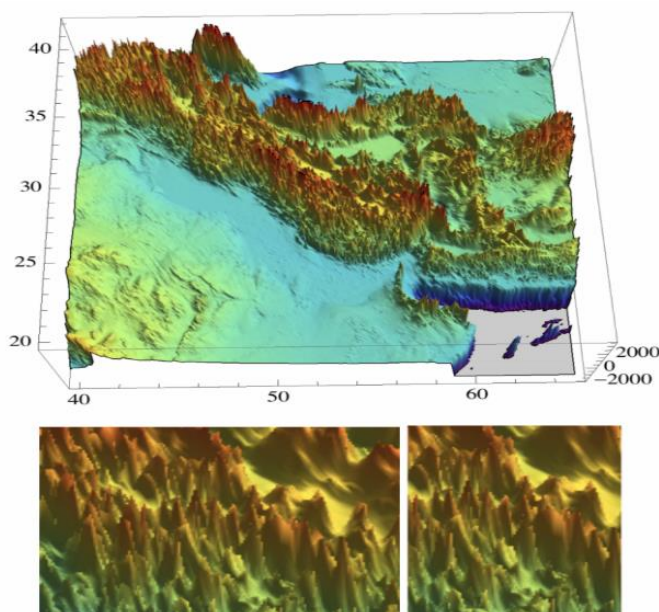
۳- داده ها

در این بررسی از داده های شبکه های توپوگرافی ایران در یک شبکه مربعی با اندازه ی 1320×1500 خانه استفاده شده است. ارتفاع $\{h_{i,j}\}$ در هر گره شبکه (i,j) مشخص است و در محدوده مورد مطالعه (شکل ۱) که پهنه بزرگتری از حدود سیاسی ایران را در می گیرد ارتفاع از حداقل ارتفاع $h_{min} = -4398$ متری (در اقیانوس هند) تا حداکثر ارتفاع $h_{max} = 5600$ متری دامنه دارد. این داده ها از منبع موسسه هواشناسی دانشگاه برلین، آلمان اخذ شده اند.

^۱Probability distribution function

^۲Box-counting

^۳Power exponent



شکل ۱: توپوگرافی ایران (شکل بالا) که برای تحلیل فرکتال مورد استفاده قرار گرفته. تصاویر پایین دو تصویر برش داده شده از تصویر بالا برای نشان دادن مقیاس ناوردا یا خواص فرکتالی توپوگرافی را نشان می‌دهد. مقیاس طول تصاویر در این دو مورد متفاوت است.

۴- روش پژوهش

۴-۱- محاسبه بعد فرکتال: روش شمارش جعبه

بعدفرکتالی یک توپوگرافی می‌تواند $2 \leq D_f \leq 3$ باشد بطوری که این بعد فرکتال هرچه به ۲ نزدیکتر باشد نمایانگر مورفولوژی صاف تر شبیه دشت‌ها می‌باشد و هر چه این عدد به ۳ نزدیکتر باشد نمایانگر مورفولوژی بسیار زبرتر با افت و خیز بسیار شدید می‌باشد. بنابراین مقدار بعد فرکتالی $2/2$ بطور کلی نشان دهنده‌ی میزان زبری نسبتاً ملایم توپوگرافی ایران است.

در روش شمارش جعبه، یک مکعب به اندازه $1500 \times 1320 \times 9547$ را در نظر گرفته شده که تمام توپوگرافی ارتفاع ایران را پوشش می‌دهد. اندازه شبکه‌ها به یکسان مقیاس بندی شده‌اند. در هر نقطه شبکه (i, j) ستونی از ارتفاع به اندازه‌های $h_{i,j} \times 1 \times 1$ با $h_{min} \leq h_{i,j} \leq h_{max}$ در نظر گرفته می‌شود. داخل مکعب برای مقیاس‌های طول متفاوت b ، با جعبه‌های به اندازه $1 \times 1 \times b$ پوشیده می‌شود، براساس آنکه چه تعداد از جعبه‌های شبکه، (برای نمونه N_b)، بخشی از ستون‌های ارتفاعی را پوشانده‌اند، شمارش می‌شوند. سپس با استفاده از شبکه دقیق‌تر با جعبه‌های کوچکتر، همان کار تکرار می‌شود. با کوچک شدن اندازه شبکه به طور مکرر، در نهایت ساختار الگوی توپوگرافی دقیق‌تری حاصل می‌شود. اگر توپوگرافی دارای ساختار فرکتال باشد پس میتوان رابطه قانون توانی زیر را انتظار داشت:

$$N_b \sim b^{-D_f}.$$

رابطه ۵

در نهایت با استفاده از رابطه ۶، بعدفرکتال بدست می‌آید.

یعنی:

$$D_f = -\frac{\log(N_b)}{\log(b)}.$$

رابطه ۶

۴-۲- نمای زبری توپوگرافی (تحلیل طیف توانی)

تراکم طیفی توانی^۱ (PSD) پروفیل ارتفاعی، ابزار ریاضی مفیدی است که توپوگرافی را به فرکانس های فضایی مختلف (بردارهای موج) تجزیه می کند. از نقطه نظر ریاضی، PSD تبدیل فوریه^۲ تابع خود همبستگی پروفیل ارتفاعی است، که شامل یک توان در طول دامنه ای از بردارهای موج است. این موضوع امکان می دهد که فرکانس های فضایی مختلفی در توپوگرافی شناسایی شوند و حاوی اطلاعات آماری سطح زمین است. برای محاسبه طیف توانی توپوگرافی ایران ابتدا باید تبدیل فوریه گسسته پروفیل ارتفاعی، $\{h_j\} = \{h_0, h_2, h, \dots, h_{N-1}\}$ انجام گیرد.

$$N j \tilde{h}_q = \sum_{i=0}^{N-1} h_j e^{-i \frac{2\pi q}{N} j} = \sum_{i=0}^{N-1} h_j \left[\cos\left(\frac{2\pi q}{N} j\right) - i \sin\left(\frac{2\pi q}{N} j\right) \right], \quad \text{رابطه ۷}$$

در رابطه ی بالا $i = \sqrt{-1}$. طیف توانی سپس از طریق میانگین گشتاور دوم $|\tilde{h}_q|$ ، حاصل می گردد (رابطه ۸).

$$S_q = \langle |\tilde{h}_q|^2 \rangle. \quad \text{رابطه ۸}$$

برای توپوگرافی های خود ناهمگرد (تک فرکتالی) با نمای زبری α ، طیف توانی نشان دهنده ی وابستگی قانون- توانی به فرکانس فضایی زبری است،

$$S_q \sim q^{m=-2(\alpha+1)}. \quad \text{رابطه ۹}$$

نمای زبری برای سطوح ناهمگرد (مونوفرکتال) شناخته شده و مرتبط با بعد فرکتال D_f پروفیل ارتفاعی است بطوریکه:

$$D_f = 3 - \alpha \quad \text{رابطه ۱۰}$$

۴-۳- تحلیل چند فرکتالی

برای محاسبه حالت چند فرکتالی توپوگرافی از سه تحلیل مختلف شامل ۱- واریانس کل پروفیل ارتفاعی^۳ در جعبه ای به اندازه ی b بعنوان تابع (b) و نمونه، $W_q(b)$ ، ۲- تابع همبستگی ارتفاع-ارتفاع^۴ $D_q(r)$ ژنرالیزه شده و ۳- انحنای وابسته به مقیاس^۵ $C_q(b)$ استفاده خواهد شد.

الف) واریانس کل پروفیل ارتفاعی، $W_q(b)$

اولین کمیت مورد توجه، واریانس کل ارتفاعی است، که به صورت زیر تعریف می شود:

$$W_q(b) = \langle |h(x) - \tilde{h}_b|^q \rangle b, \quad \text{رابطه ۱۱}$$

در رابطه بالا نماد $\langle \dots \rangle$ میانگین فضایی در جعبه ای به اندازه b و \tilde{h}_b میانگین ارتفاع در شمال پنجره است. برای توپوگرافی های خودناهمگرد (تک فرکتالی) این مقدار یک رابطه قانون- توانی با جعبه ای به اندازه b دارد که به صورت زیر نوشته می شود:

$$W_q(b) \sim b^{\alpha(q)}, \quad \text{رابطه ۱۲}$$

که در آن نمای زبری α با گشتاور دوم $q=2$ به عنوان $W_2(b) \sim b^{2\alpha}$ ، تعریف می شود و نمای ژنرالیزه شده برای سطوح خودناهمگرد باید رفتاری خطی داشته باشد. یعنی:

$$\alpha(q) = q\alpha \quad \text{(رابطه ۱۳)}$$

¹. Power spectrum density

². Fourier transform

³. Scale dependent curvature

⁴. Generalized height-height correlation

⁵. Scale dependent curvature

برای مجموعه داده های موجود در پروفایل ارتفاعی توپوگرافی ایران جعبه هایی با اندازه مختلف $b \times b$ در نظر گرفته می شود و ابتدا میانگین ارتفاع داخل هر جعبه $\bar{h}_b = \frac{1}{b^2} \sum_{i,j=1}^b h(i,j)$ محاسبه خواهد شد. سپس واریانس وابسته به مقیاس $W_q(b)$ به عنوان تابعی از مقیاس طول b ، توسط مجموعه گسسته ذیل محاسبه می گردد.

$$W_q(b) = \frac{1}{b^2} \sum_{i,j=1}^b |h(i,j) - \bar{h}_b|^q \quad \text{رابطه ۱۴}$$

ب) تابع همبستگی تعمیم یافته ی ارتفاع-ارتفاع $D_q(r)$

دومین کمیت مورد توجه برای بررسی خصوصیت چند فرکتالی توپوگرافی، تابع همبستگی تعمیم یافته ارتفاع-ارتفاع است. که به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_q(r) = \langle |h(x+r) - h(x)|^q \rangle \quad \text{رابطه ۱۵}$$

تعریف مشابهی برای شبکه بندی مشتمل بر مجموعه کل داده ها برای اندازه گیری $D_q(r)$ ارائه شده و رابطه مقیاسی آن با r باید آزمون گردد. برای سطوح خود ناهمگرد (تک فرکتال) باید رابطه قانون توانی زیر مشاهده شود.

$$D_q(r) \sim r^{\alpha(q)} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

که در آن $\alpha(q) = q\alpha$ ، وقتی که $\alpha = \alpha(2)/2$ است.

ج) انحنای وابسته به مقیاس $C_q(b)$

به منظور بررسی بیشتر کارایی محاسبات قبلی و تقویت شواهدی از خصوصیات چند فرکتالی در چشم اندازه های توپوگرافیکی، انحنای وابسته به مقیاس $C_q(b)$ محاسبه می شود. انحنای محلی $C_b(x)$ در نقطه ی x ، در پنجره ای با اندازه b به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_b(x) = \sum_{m=1}^M [h(x + be_m) - h(x)] \quad \text{رابطه ۱۷}$$

جهت های خمیدگی $\{e_m\}_{m=1}^M$ مجموعه ثابتی از بردارهایی هستند که حاصل جمع آنها به صفر می رسد. در محدوده مطالعاتی (شبکه منظم مربعی)، $\{e_m\}$ در طول ۱۰ مسیر نقطه گذاری شده، برای هر نقطه شبکه (i,j) در شبکه ی مربعی، انحنای محلی $C(i,j)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$C(i,j) = [h(i+1,j) + h(i-1,j) - 2h(i,j)] + [h(i,j+1) + h(i,j)] \quad \text{رابطه ۱۸}$$

مقدار $C(i,j)$ برای همه نقاط شبکه (i,j) متعلق به پنجره با اندازه $b \times b$ باید اندازه گیری شود. سپس برای هر گشتاور q ، یک میانگین فضایی بر روی پنجره جعبه، حاصل گردد تا انحنای وابسته به مقیاس $C_q(b)$ بدست آید. یعنی:

$$\langle C^q(i,j) \rangle_b = \frac{1}{b^2} \sum_{i,j=1}^b C^q(i,j) \quad \text{رابطه ۱۹}$$

برای بیشتر چشم اندازه های توپوگرافیکی، انحنای وابسته به مقیاس، رابطه قانون توانی زیر را دنبال می کند:

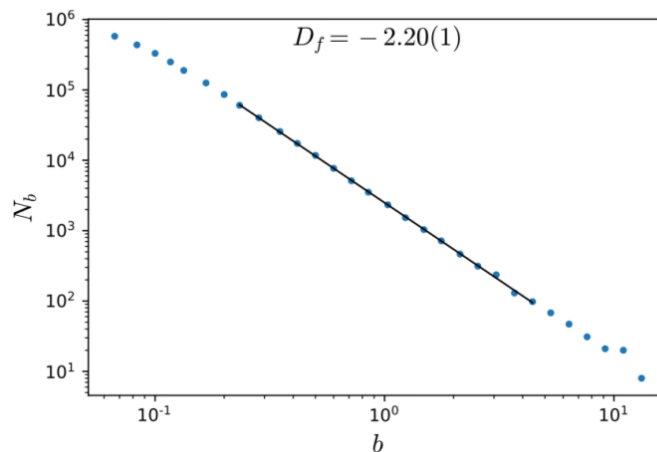
$$C_q(b) \sim b^{\alpha(q)} \quad \text{رابطه ۲۰}$$

که در آن برای $q=2$ ، $\alpha(q) = 2\alpha$ ، نمای زبری α ، $\alpha(2) = 2\alpha$ بدست آمده است. برای سطوح خود ناهمگرد، رابطه ی خطی $\alpha(q) = q\alpha$ باید برقرار باشد.

۵- یافته ها

۵-۱- محاسبه بعد فرکتال توپوگرافی ایران (روش شمارش جعبه)

با استفاده از توضیحات بخش ۴-۱ و رابطه (۶) یعنی روش شمارش جعبه، بعد فرکتال D_f پروفیل ارتفاعی ایران محاسبه گردید. نمودار رابطه ۶ با توجه به داده های ایران، به صورت خطی شیب دار ارائه می شود که در آن ارزش لگاریتمی (N_b) در محور Y و مقدار لگاریتمی (b) در محور X ترسیم شده است (شکل ۲). همانطور که شکل ۲ و محاسبات نشان می دهد بعد فرکتال توپوگرافی ایران $D_f = 2/20$ بدست می آید.

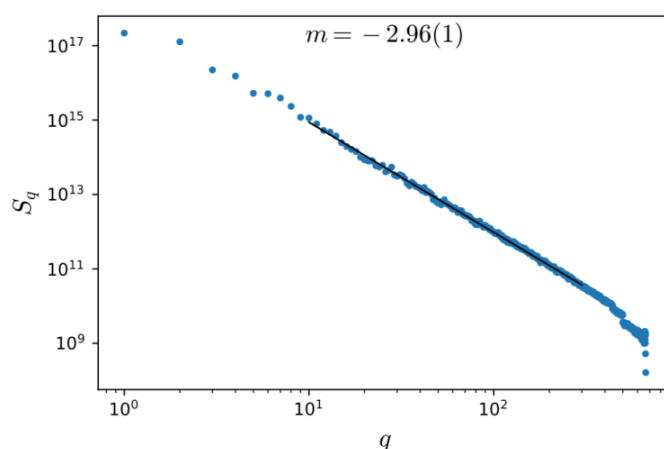


شکل ۲: روش شمارش جعبه برای برآورد بعد فرکتال توپوگرافی در ایران. N_b تعداد جعبه های به اندازه $1 \times 1 \times b$ برای پوشش قسمتی از ستون های ارتفاع است. خط توپر بهترین قانون توانی برای داده های این پژوهش است.

۵-۲- نمای زبری توپوگرافی ایران (تحلیل طیف توانی)

با توجه به توضیحات بخش ۴-۲ و روابط ۷ تا ۱۰، طیف توانی و نمای زبری توپوگرافی ایران محاسبه گردید. در شکل (۳) نیز طیف توانی برای پروفیل ارتفاع توپوگرافی ایران ترسیم شده است. همانطور که شکل نشان می دهد رابطه قانون توانی با نمای $m = -2/96(1)$ برای توپوگرافی ایران قابل مشاهده است که نمای زبری $\alpha = 0/48(1)$ را بدست می دهد.

اگر این رابطه را برای مقادیر (1) و $D_f = 2/20$ و $\alpha = 0/48(1)$ حاصله توپوگرافی ایران بررسی کنیم، نتایج نشان می دهد که توپوگرافی ایران در واقع یک مونو فرکتال نیست و حاوی ساختار پیچیده ی چند فرکتالی (چند فرکتال) است. با توجه به رابطه ۱۰، بعد فرکتال توپوگرافی ایران چنانچه مونو فرکتال باشد بایستی برابر $2/52$ باشد، درحالیکه مقدار آن $2/2$ محاسبه شده لذا می توان پی برد که توپوگرافی ایران چند فرکتالی است و باید از طریق روابط چند فرکتالی بررسی گردد.

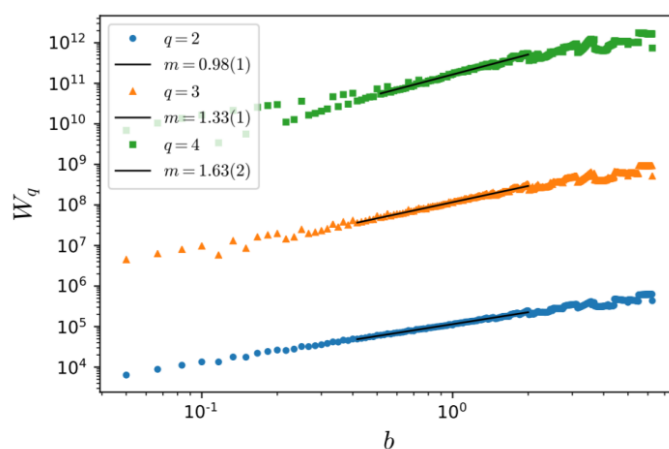


شکل ۳: طیف توانی (محور y) S_q پروفیل ارتفاعی $\{h\}$ برای توپوگرافی ایران، در مقابل q (محور x) برای یک سطح خود ناهمگرد، شیب منحنی در مقیاس لگاریتمی برحسب نمای زبری α به صورت $M = -2(\alpha + 1)$ می باشد. $M = -2/96$ و α معادل $(1) 0/48$ بدست آمد.

۳-۵- تحلیل چند فرکتالی

الف) واریانس کل پروفایل ارتفاعی، $W_q(b)$

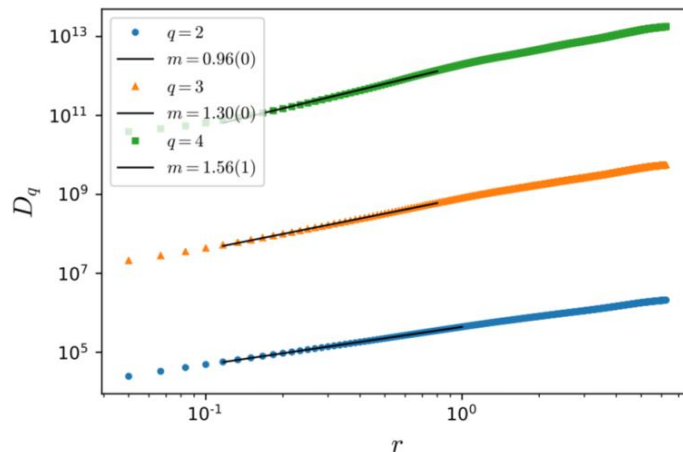
با توجه به بخش ۳-۴ و روابط ۱۱ تا ۱۴ واریانس کل پروفایل ارتفاعی ایران محاسبه شده و نتایج آن در شکل ۴ برای سه گشتاور مختلف $q=2, 3, 4$ ارائه شده است. وقتی نتایج در مقیاس لگاریتمی ترسیم شدند رابطه مقیاسی بسیار خوبی بدست آمد. بهترین برازش خطی برای داده های موجود، همانطور که در خطوط توپر نشان داده شده (شکل ۴) نمای کلی $\alpha(1) = 0/98$ و $\alpha(2) = 1/33$ و $\alpha(3) = 1/63$ را ارائه می دهد. به راحتی می توان نمای زبری دومین گشتاور را خواند: $\alpha(1) = 0/49$ و $\alpha(2) = 0/49$. اگر توپوگرافی ایران خود ناهمگرد باشد، انتظار می رود که $\alpha(3) = \alpha(4)/4 = 0/41$ و $\alpha(3)/3 = \alpha(4)/4 = 0/44$ باشد. اگر این رابطه را آزمون کنیم، درمی یابیم که $\alpha(3)/3 = \alpha(4)/4 = 0/41$ و $\alpha(3)/3 = 0/44$ که متفاوت از نمای زبری است که از دومین گشتاور بدست آمده $\alpha = 0/49$ است. این نتیجه نشان می دهد که خصوصیات آماری توپوگرافی ارتفاع ایران خود ناهمگرد نبوده و در نتیجه یک فرکتال ساده نیست و لذا ساختاری چند فرکتالی (چند فرکتالی) دارد.



شکل ۴: واریانس کل پروفایل ارتفاعی $W_q(b)$ ، درجه های با اندازه های مختلف $b \times b$ برای گشتاور های مختلف $q=2, 3, 4$ اندازه گیری شده است. نماهای مربوطه از طریق اندازه گیری شیب نمودارهای لگاریتمی بدست آمده اند.

ب) تابع همبستگی تعمیم یافته ی ارتفاع-ارتفاع $D_q(r)$

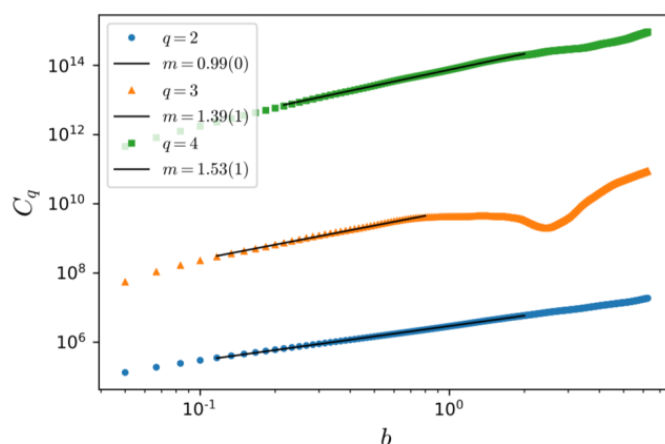
با توجه به توضیحات بخش ۴-۳-ب و روابط ۱۵ تا ۱۶، شکل (۵) و نتایج آن در مورد تابع همبستگی ارتفاع-ارتفاع حاصل شده است. همانگونه که شکل ۵ نشان می دهد رابطه مقیاسی بسیار خوبی با r در مقیاس لگاریتمی بدست آمده. با برازش خطی، شیب هایی از برازش خطی بدست می آیند که نماهای تعمیم یافته برای سه مقدار $q=2,3,4$ هستند. براین اساس مشخص شد $\alpha(2) = 0/96(0)$ نمای زبری $\alpha(2)/2 = 0/48(0)$ را می دهد. همچنین آشکار شد که نماهای مرتبه بالاتر $\alpha(3) = 1/30(0)$ و $\alpha(4) = 1/56(1)$ است. اگر دوباره رابطه ی خطی بررسی شود تا وجود خود ناهمگردی آزمون گردد، مشخص می گردد که $\alpha(3)/3 = 0/43(1)$ و $\alpha(4)/4 = 0/39(1)$ است که هر دو نسبت به نمای زبری انحنای دارند و در واقع نشان دهنده ی آماره های چند فرکتالی در پروفایل ارتفاعی توپوگرافی ایران هستند.



شکل ۵: تابع همبستگی تعمیم یافته ارتفاع-ارتفاع $D_q(r)$ برای گشتاور های مختلف $q=2,3,4$ است. نماهای مربوطه با اندازه گیری شیب نمودارهای $\log\text{-}\log$ در مقیاس لگاریتمی است.

ج) انحنای وابسته به مقیاس $C_q(b)$

تئوری مربوط به انحنای وابسته به مقیاس در بخش ۴-۳-ج و روابط ۱۸ تا ۲۱ تشریح شد. بر این پایه شکل (۶) نتایج محاسبات برای گشتاور های مختلف انحنای وابسته به مقیاس توپوگرافی ایران را نشان می دهد. نتایج در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده و رفتار قانون توانی در طیف گسترده ای از مقیاس های طولی را نشان می دهد. بهترین برازش برای داده ها (با خط توپر نشان داده شده) نماهای چند فرکتالی برای هر گشتاور q را ارائه می دهد. نتایج نشان می دهد که $\alpha(2) = 0/99(0)$ که نمای زبری (۵) $\alpha = \alpha(2)/2 = 0/495$ را بدست می دهد، با برآوردهای بدست آمده ی قبلی همخوانی دارد. همچنین نماهای گشتاور بالاتری مثل $\alpha(4) = 1/53$ و $\alpha(3) = 1/39$ بدست آمد. همانطور که در بالا ذکر شد برای سطوح خود ناهمگرد باید $\alpha(q) = q\alpha$ یا معادل آن $\alpha(q)/q = \alpha$ باشد. وقتی این معیارها برای توپوگرافی ایران آزمون می شوند، مشخص می گردد که $\alpha(4)/4 = 0/38$ (۱) و $\alpha(3)/3 = 0/46$ (۱) که از برآورد (۵) $\alpha = 0/49$ متفاوت است. این نتیجه گیری نشان می دهد که پروفایل ارتفاعی توپوگرافی ایران آماره های چند فرکتالی دارد.



شکل (۶) انحنای وابسته به مقیاس $C_q(b)$ ، در جعبه‌های مختلف با اندازه $b \times b$ برای گشتاورهای مختلف $q=2,3,4$ اندازه‌گیری شده است، نماهای مربوطه از طریق اندازه‌گیری شیب نمودارهای لگاریتمی بدست آمده‌اند.

جدول (۱) نماهای چند فرکتالی $\alpha(q)$ برای $q=2,3,4$ با سه تحلیل مختلف یعنی، واریانس کل پروفایل ارتفاعی $W_q(b)$ ، تابع همبستگی تعمیم یافته ارتفاع-ارتفاع $D_q(r)$ و انحنای وابسته به مقیاس $C_q(b)$

روش	$\alpha(2)$	$\alpha(3)$	$\alpha(4)$	$\alpha = \alpha(2)/2$
$W_q(b)$	0/98(1)	1/33(1)	1/63(2)	0/49(1)
$(r)D_q$	0/96(0)	1/30(0)	1/56(1)	0/48(0)
$C_q(b)$	0/99(0)	1/39(1)	1/53(1)	0/495(5)

نتیجه‌گیری

کاربرد تحلیل مونو و چند فرکتالی در تحلیل درست‌افت و خیزهای کمیت‌های تصادفی است. در این مطالعه کمیت تصادفی مقدار ارتفاع، در هر نقطه از توپوگرافی ایران است. منظور از افت و خیز ارتفاع، افت و خیز نسبت به میانگین ارتفاع در توپوگرافی ایران است. با نگاه به پروفایل توپوگرافی، اکثر ارتفاع‌ها حول نقطه میانگین توزیع شده‌اند. در واقع میانگین ارتفاع، گشتاور میانگین اول آن است. بنابراین فرض می‌شود که پروفایل ارتفاع از میانگین آن کم شده تا به پروفایل افت و خیز ارتفاع دست یافته شود. گشتاور مرتبه دوم که معرف میزان انحراف از میانگین است با واریانس ارتفاع داده می‌شود که از روی آن مقدار انحراف از معیار قابل محاسبه است که معیاری است که میزان افت و خیز حول میانگین را می‌دهد. این افت و خیز با افزایش مقیاس ناحیه‌ی توپوگرافی مورد مطالعه زیاد می‌شود. دلیل آن، این است که در مقیاس‌های طولی بزرگتر تعداد نقاط ارتفاعی بیشتری در دسترس است و در نتیجه انتظار منطقی این است که انحراف معیار با مقیاس ارتفاع با فاصله‌ی زیاد از میانگین یافت شود، بیشتر است. در نتیجه انتظار منطقی این است که انحراف معیار با مقیاس طولی ناحیه مورد مطالعه نسبت مستقیم داشته باشد. این تناسب در سطوح توپوگرافیک خودمتشابه به شکل توانی است، یعنی، انحراف معیار ارتفاع در ناحیه‌ای با مقیاس طولی L به صورت L^α رشد می‌کند که $0 \leq \alpha \leq 1$ نمای زبری منتسب به آن سطح زبر است. هرچه α به صفر نزدیکتر باشد بیانگر سطح زبرتر با افت و خیز بیشتر است و هرچه α به یک نزدیکتر باشد نمایانگر سطح صاف تر با افت و خیز بسیار کمتر است. بنابراین اگر در پروفایل افت و خیز ارتفاع به گشتاورهای مراتب پایین تر نظیر میانگین واریانس ارتفاع نگاه کنید بیشتر اطلاعات در مورد ارتفاع‌های نزدیک به ارتفاع‌های میانگین بدست می‌آید و بالعکس گشتاورهای مرتبه‌ی بالاتر حاوی اطلاعات مربوط به افت و خیز بسیار زیاد و دور

از میانگین است. زیرا بعنوان مثال اگر اختلاف ارتفاع از میانگین $h - \bar{h} = 0/1$ گشتاور منطقه ی ۲ متناسب با $0/01 = h - \bar{h}^2$ است. در حالی که گشتاور مرتبه ۴ بعنوان مثال متناسب است با $0/0001 = h - \bar{h}^4$ که در مقابل $0/001$ قابل صرف نظر است. و بعکس برای افت و خیز های بزرگ $h - \bar{h} = 10$ گشتاور مرتبه ۲ (واریانس) برابر ۱۰۰ و گشتاور مرتبه ۴ برابر ۱۰۰۰۰ است که نسبت به گشتاور مرحله ۲ بسیار قابل توجه است. از طرف دیگر همانگونه که گفته شد افت و خیز های بسیار بزرگ در مقیاس های طولی بسیار بزرگ محتمل تر هستند بنابراین گشتاورهای مرتبه ی بالاتر اهمیت ویژه ای در مطالعات ژئومورفولوژیک در مقیاس طولی بزرگتر پیدا می کنند. سوال اصلی این است که آیا ارتباطی بین تحلیل آماری یک چشم انداز توپوگرافی در مقیاس بزرگ (مانند یک کشور) و تحلیل آن در یک مقیاس طولی کوچکتر (مانند یک منطقه ی توپوگرافی) وجود دارد یا خیر؟ پاسخ به این سوال اینگونه داده می شود که آیا این سطح، سطح زبر، یک سطح خودمتشابه مونو فرکتال است یا یک سطح چند فرکتال؟ در صورتی که این سطح مونو فرکتال باشد تمامی گشتاورهای مرتبه ی بالاتر بر اساس گشتاور مرتبه دوم قابل توصیف هستند و در نتیجه برای مطالعات در مقیاس بزرگ نیازی به تحلیل تمامی داده ها و صرف وقت، انرژی و هزینه ی بسیار زیاد نیست. در حالی که اگر یک سطح چند فرکتالی باشد به این معنی است که تحلیل های آماری در مقیاس های منطقه ای به سادگی قابل تعمیم به مقیاس های بزرگ و کلان نیستند. چرا که اهمیت افت و خیز های بزرگ ارتفاع در این مقیاس ها نقش تعیین کننده ای را ایفا می کند. لذا اهمیت نتایج بدست آمده در این مقاله در آن است که نشان داده شده که پروفایل ارتفاع توپوگرافی در ایران مونو فرکتال نیست بلکه چند فرکتال است بنابراین تعمیم تحلیل های منطقه ای، در یک محدوده ی مشخص به محدوده های توپوگرافی وسیع تر معتبر نمی باشد و برای تحلیل درست تر و کسب اطلاعات آماری دقیق تر می بایست تمامی داده ها در کل منطقه ی وسیع تر مورد تحلیل آماری قرار گیرد.

منابع

- الوانی، سید مهدی، دانایی فرد، حسن (۱۳۸۲). تصمیم گیری از نگاه نظریه آشوب، مجله ی تحول اداری، دوره ۵، شماره ۲۱، صص ۱۲-۲۵.
- حسین زاده، سید رضا (۱۳۸۷). ژئومورفولوژی و مطالعات آن در ایران بعد از پیروزی انقلاب اسلامی، مجله ی پژوهشهای جغرافیایی، شماره ۶۴، صص ۱۳۷-۱۵۵.
- رامشت، محمدحسین (۱۳۸۲) نظریه کیاس در ژئومورفولوژی، مجله ی جغرافیا و توسعه، شماره ۱، صص ۳۸
- رامشت، محمدحسین، توانگر، منوچهر (۱۳۸۱). مفهوم تعادل در دیدگاه فلسفی ژئومورفولوژی، مجله ی تحقیقات ۹۴ - جغرافیایی، شماره ۶۶، صص ۶۵-۷۹.
- رامشت، محمدحسین، کمانه، سید عبدالعلی، فتوحی، صمد (۱۳۸۶) معرفتشناسی و مدلسازی در ژئومورفولوژی، مجله ی پژوهشهای جغرافیایی، شماره ۶۰، صص ۳۱-۴۸.
- کرم، امیر (۱۳۸۹). نظریه آشوب، فرکتال (برخال) و سیستم های غیرخطی در ژئومورفولوژی، فصلنامه جغرافیای طبیعی، شماره ۸، صص ۶۷-۸۲.
- گلیک، جیمز (۱۳۷۶) نظم در آشفتگی، ترجمه ی مسعود نیازمند، تهران، مرکز آموزش و بهسازی نیروی هوایی (هما).
- ملک عباسی، منصور. (۱۳۸۱). هندسه فرکتال در جغرافیا. فصلنامه رشد آموزش جغرافیا، شماره ۶۲
- نگهبان، سعید، مکرم، مرصیه (۱۳۹۳)، طبقه بندی لندفرم ها با استفاده از شاخص موقعیت توپوگرافی (TPI)، مجله سپهر، دوره ۲۳، شماره ۹۲، صص ۵۷-۶۵.
- نثانی وحید (۱۳۸۹) مدیریت آشوب نظم در بینظمی، چاپ اول، تهران: کلک سیمین.

- *Barabasi, A. and H. Stanley, Fractal concepts in surface growth (Cambridge university press, 1995).*
- *Batty, Michael., (2011). Cities; Building a science of cities. Elsevier Journal. Doi: 10.1016 (www.elsevier.com/locate/cities).*
- *Batty, Michael., Longley, Peter., (1994). Fractal Cities: A geometry of form and function. Academic press, San Diego, CA and London.*
- *Burrough, P.A., 1981. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. Nature 294:240-242. B. Mandelbrot. Les objets fractals. La Recherche, 9:1-13, 1978.*
- *Bouchaud, J.P. E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planes, Models of fractal cracks, Physical review letters, 71(14), p.2240 (1993).*
- *Burrough, P. A. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data, Nature 294*
- *Barabsi, A-L. and H. E. Stanley, (1995). Fractal concepts in surface growth, (Cambridge university press*
- *Bouchaud, E., Lapasset, G., Plan`es, J., and Naveos, S1993.: Statistics of branched fracture surfaces, Phys. Rev. B, 48, 2917-2928,*
- *Constantine, G. and P. Hall, Characterizing surface smoothness via estimation of effective fractal dimension, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 56 97113 (1994).*
- *Chan, G. and A. T. A. Wood, Increment-based estimators of fractal dimension for two-dimensional surface data. Statist. Sinica 10 343376 (2000).*
- *Duncan, P. C. Ray, and D. U. N. C. A. N. Beverly, Statistical geography: Problems in analyzing areal data, Statistical geography: Problems in analyzing areal data (1961).*
- *Dubuc, B. S. W. Zucker, C. Tricot, J. F. Quiniou and D. Wehbi, Evaluating the fractal dimension of surfaces, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 425 113127 (1989b).*
- *Davies, S. and P. Hall, Fractal analysis of surface roughness by using spatial data, J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 61 337 (1999).*
- *Fournier, D. Fussell, and L. Carpenter. Computer rendering of stochastic models. Communications of the ACM, 25(6):164-172, June 1982.*
- *Gneiting Tilmann, Hana `Sev`c`ikov`a and Donald B. Percival Estimators of Fractal Dimension: Assessing the Roughness of Time Series and Spatial Data Vol. 27, No. 2, 247-277,*
- *Go_, J. A. and T. H. Jordan, (1988). Stochastic modeling of seaoor morphology inversion of sea beam data for 2nd-order statistics. Journal of Geophysical Research 93 1358913608.*
- *Gagnon J.-S. 1, S. Lovejoy,2, and D. Schertzer3,(2006)Multifractal earth topography Processes Geophys., 13, 541-570.*
- *Gaonac`h, H., Lovejoy, S., and Schertzer, D(2003).: Multifractal analysis of infrared imagery of active thermal features at Kilauea volcano, Int. J. Rem. Sens., 24(11), 2323-2344,.*
- *Gagnon, J.-S., Lovejoy, S., and Schertzer, D(2003).: Multifractal surfaces and terrestrial topography, Europhys. Lett., 62(6), 801-807.*
- *Harvey, D. C., Gaonac`h, H., Lovejoy, S., Stix, J., and Schertzer, D(2002).: Multifractal characterization of remotely sensed volcanic features: A case study from the Kilauea volcano, Hawaii, Fractals, 10, 265-274.*
- *Kondev, J., Henley, C.L. and Salinas, D.G., 2000. Nonlinear measures for characterizing rough surface morphologies. Physical Review E, 61(1), p.104.*

- Klinkenberg, B. (1994). *A review of methods used to determine the fractal dimension of linear features. Mathematical Geology*, 26(1), 23-46.
- Kusák, M., 2014. *Review article: Methods of fractal geometry used in the study of complex geomorphology networks. AUC Geographia*, 49, pp.99-110.
- Kondev, J. C. L. Henley, and D. G. Salinas, *Physical Review E* 61, (2000), 104.
- Klinkenberg, Brian, "Tests Of A Fractal Model Of Topography" (1988). *Digitized Theses. Paper 1746*.
- Lovejoy, S. and D. Schertzer, *Multifractals, universality classes and satellite and radar measurements of cloud and rain fields, Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 95(D3), 2021-2034 (1990).
- Lavalley, D. S. Lovejoy, D. Schertzer, and P. Ladoy, *Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation, Fractals in geography*, 158-192 (1993).
- Weissel, J.K. L.F. Pratson, and A. Malinverno, *The length?scaling properties of topography, Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 99(B7), pp.13997-14012 (1994).
- Lovejoy, S. and D. Schertzer, *Multifractals and rain, New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources*, pp.61-103 (1995).
- Lavall'ee, D., Lovejoy, S., Schertzer, D., and Ladoy, P.: *Nonlinear variability of landscape topography: multifractal analysis and simulation*, in: *Fractals in Geography*, edited by: De Cola, L. and Lam, N., Prentice-Hall, New Jersey, 158-192, 1993.
- Leary, P.: *Rock as a critical-point system and the inherent implausibility of reliable earthquake prediction, Geophys. J. Internat.*, 131, 451-466, 1997.
- Lewis, G. M., Pecknold, S., Lovejoy, S., and Schertzer, D.)1999(*The scale invariant generator technique for quantifying anisotropic scale invariance, Computers and Geosciences*, 25(9), 963-978,.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D.:) 1990(*Our multifractal atmosphere: A unique laboratory for non-linear dynamics, Physics in Canada*,46(4), 62-71,.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D.: *Multifractal analysis techniques and the rain and cloud fields from 10-3 to 106 m*, in: *Non-linear Variability in Geophysics*, edited by: Schertzer, D. and Lovejoy, S., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 111-144, 1991.
- Lovejoy, S., Lavall'ee, D., Schertzer, D., and Ladoy, P.: *The 11/2 law and multifractal topography: theory and analysis, Nonlin. Processes Geophys.*, 2, 16-22, 1995, <http://www.nonlin-processes-geophys.net/2/16/1995/>.
- Lovejoy, S., Pecknold, S., and Schertzer, D.: *Stratified multifractal magnetization and surface geomagnetic fields, part 1: spectral analysis and modelling, Geophys. J. Inter.*, 145, 112-126, 2001a.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., Tessier, Y., and Gaonac'h, H.: *Multifractals and resolution-independent remote sensing algorithms: the example of ocean color, Int. J. Remote Sensing*, 22, 1191-1234, 2001b.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., and Gagnon, J.-S)2005(*Multifractal simulations of the Earth's surface and interior: anisotropic singularities and morphology*, in: *GIS and Spatial Analysis, Proc. of the Inter. Assoc. Math. Geology 2005*, edited by: Cheng, Q. and Bonham-Carter, G., 37-54,
- Mandelbrot, B.B. and J. W. Van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev.* 10 422-437 (1968).
- Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA (1982).

- *Michaelm F.Goodchild.David M.Mark(1987).Fractal Nature Of Geomographic Phenomenea.Annals of the Association of American Geomorphology. Wily.Volume77,issue2,265. New York:Springer-Verag,1989.*
- *Morel, S. J. Schmittbuhl, E. Bouchaud, and G. Valentin, Scaling of crack surfaces and imply cations for fracture mechanics. Physical review letters, 85(8), p.1678 (2000).*
- *Meakin, p Fractals, scaling and growth far from equilibrium, Vol. 5 (Cambridge university press, 1997).*
- *Mark,D:M.,P.B.Aronson,1984.Scale-dependent fractal dimentions of topographic surfeces:An emprical investigation, with applications in geomorphology.Math.Geol.*
- *Marsan, D. and Bean, C. J. (1999): Multiscaling nature of sonic velocities and lithography in the upper crystalline crust: evidence from the KTB main borehole, Geophys. Res. Lett., 26, 275–278,*
- *Morel, S., Schmittbuhl, J., Bouchaud, E., and Valentin, G(2000).: Scaling of crack surfaces and implications for fracture mechanics, Phys. Rev. Lett., 85, 1678–1681.*
- *Pecknold, S. Lovejoy, and D. Schertzer, The morphology and texture of anisotropic multi-fractals using generalized scale invariance, In Stochastic Models in Geosystems (pp. 269-311). Springer, New York, NY (1997).*
- *Pilkington, M. and Todoeschuck, J.: Scaling nature of crustal susceptibilities, Geophys. Res. Lett., 22, 779–782, 1995.*
- *Rice, R.J. Fundamentals of geomorphology, (Longman Scienti_c & Technical,(1998).O. D. 240-242.*
- *Rothrock, D. A. and A. S. Thorndike, Geometric properties of the underside of sea ice, Journal of Geophysical Research 85 39553963 (1980).*
- *Roy,A Andre,Ginette Gravel and Celine Gauthier,1987.Measuring the Dimension of Surfaces:A Review And Appraisal Of Different Methods. Proceeding Auto-Carto8:68-77*
- *Schmittbuhl, J.P. Vilotte, and S. Roux, Reliability of self-a_ne measurements, Physical Review E, 51(1), p.131 (1995).*
- *Santis,Angelo De .(1997) A direct divider method for self-affine fractal profiles and surfacesGEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS, VOL. 24, NO. 16, PAGES 2099-2102, AUGUST 15.*
- *Tchiguirinskaia, S. Lu, F.J. Molz, T.M. Williams, and D. Lavallo, Multifractal versus monofractal analysis of wetland topography, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 14(1), pp.8-32 (2000).*
- *Weissel, J. K., Lincoln, F. P., and Malinverno, A, (1994).: The lengthscaling properties of topography, J. Geophys. Res., 99(B7), 13 997–14 012.*
- *Xiaoshu, Lu.Derek., Clements.Viljanen, Martti., (2012). Fractal Geometry and architecture design. Department of civil andstructural engineering, school of engineering, Aalto University,Chaotic Modeling and simulation (CMSIM).*
- *Zhu, z and M. L. Stein, Parameter estimation for fractional Brownian surfaces, Statist. Sinica.*